d)
$g'(t))=0=\cos t\times f'(\sin t)\Rightarrow \cos t=0$ *ou* $f'(\sin t)=0$
Comme $\cos t\neq 0$ alors : $g'(t))=0\Leftrightarrow f'(\sin t)=0$
Or on sait que f est strictement décroissante

sur $[-1,1]$ et $f'([-1,1])=\left[-\frac{2}{3},2\right]$

D'autre part la fonction sin est une bijection strictement croissante de $\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$ sur $[-1,1]$

Donc la fonction t→f'(sin(t)) est une bijection strictement décroissante de $\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$ sur $\left[-\frac{2}{3},2\right]$

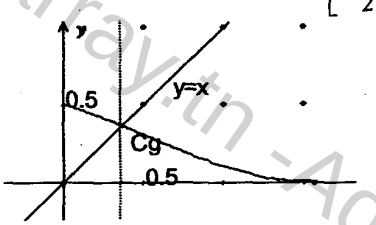
Et Comme $0\in\left[-\frac{3}{2},2\right]$ donc l'équation $f'(\sin t)=0$ admet une unique solution $\alpha\in\left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[$

e) $f'(\sin\alpha)=0\Leftrightarrow \sin\alpha=-2+\sqrt{3}$ d'où

$$g(\alpha)=\frac{1-\sin^2\alpha}{2+\sin\alpha}=\frac{1-(4-4\sqrt{3}+3)}{1+2-\sqrt{3}}=\frac{4\sqrt{3}-6}{3-\sqrt{3}}$$

$$\Rightarrow g(\alpha)=-\frac{7}{2}+\sqrt{3}$$

f) g'(t) à le signe de $f'(t)\leq 0$ sur $\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$



a) l'intersection de C_g et la droite y = x est le point d'abscisse 0.37 donc : g (t) = t donne t = 0.37

b) posons h (t) = g(t) – t

h' (t) = g ' (t) – 1 ≤ 0 d'où h est continue et strictement décroissante sur $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ et $h\left(\left[0,\frac{\pi}{2}\right]\right)=\left[h\left(\frac{\pi}{2}\right),h(0)\right]=\left[-\frac{\pi}{2},\frac{1}{2}\right]$

Comme $0\in\left[-\frac{\pi}{2},\frac{1}{2}\right]$ on aura l'équation g(t) – t = 0 admet une solution unique t_0 appartient à $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$

5) a) g est continue sur $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ et dérivable sur $\left]0,\frac{\pi}{2}\right[$ et $\forall x\in\left]0,\frac{\pi}{2}\right[$ on a:

$|g'(x)|=|f'(\sin t)\times\cos t|\leq\frac{2}{3}$ d'où d'après l'inégalité des accroissement finis on aura pour $t_0\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ et $u_n\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$:

$:|g(u_n)-g(t_0)|\leq\frac{2}{3}|u_n-t_0|\Leftrightarrow|u_{n+1}-t_0|\leq\frac{2}{3}|u_n-t_0|$

b) • pour n = 0 on a : $|u_0-t_0|\leq\left(\frac{2}{3}\right)^0|u_0-t_0|$

Vrai car $\left(\frac{2}{3}\right)^0=1$

• Supposons que $|u_n-t_0|\leq(\frac{2}{3})^n|u_0-t_0|$ et montrons que $|u_{n+1}-t_0|\leq(\frac{2}{3})^{n+1}|u_0-t_0|$, en effet :

$|u_{n+1}-t_0|\leq\frac{2}{3}|u_n-t_0|$ *et* $|u_n-t_0|\leq(\frac{2}{3})^n|u_0-t_0|$

$\Rightarrow|u_{n+1}-t_0|\leq\frac{2}{3}\times(\frac{2}{3})^n|u_0-t_0|\leq(\frac{2}{3})^{n+1}|u_0-t_0|$

Donc d'après le principe de raisonnement par récurrence on a pour tout entier naturel n : $|u_n-t_0|\leq(\frac{2}{3})^n|u_0-t_0|$

c) Puisque $-1\leq\frac{2}{3}\leq 1$ il résulte $\lim\limits_{n\to+\infty}(\frac{2}{3})^n=0$ et par suite

$\lim\limits_{n\to+\infty}(\frac{2}{3})^n\overbrace{|u_0-t_0|}^{\neq 0\ (constante)}=0$ ce qui donne $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty}u_n=t_0}$

Exercice n° 24

$x\in IR, x+2\pi\in IR$ *et*

$$f(x+2\pi)=\sin^2(x+2\pi)-\sin(x+2\pi)$$
$$=\sin^2 x-\sin x=f(x)$$

Donc f est périodique de période $T=2\pi$

Par suite on étudie f sur $[-\pi,\pi]$

f est dérivable sur IR et on a :

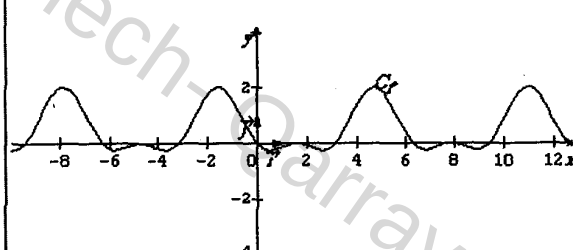
$f'(x)=2\sin x\cos x-\cos x=\cos x\times(2\sin x-1)$

$f'(x)=0\Leftrightarrow\cos x=0$ *ou* $\sin x=\frac{1}{2}, x\in[-\pi,\pi]$

$\Leftrightarrow x=\frac{\pi}{2}, x=-\frac{\pi}{2}, x=\frac{\pi}{6}$ *ou* $x=\frac{5\pi}{6}$

x	$-\pi$		$-\frac{\pi}{2}$		$\frac{\pi}{6}$		$\frac{\pi}{2}$		$\frac{5\pi}{6}$		π
$f'(x)$		+	0	–	0	+	0	–	0	+	
$f(x)$	0	↗	2	↘	$-\frac{1}{4}$	↗	0	↘	$-\frac{1}{4}$	↗	0

On trace C_f sur $[-\pi,\pi]$ puis la complète par les translations des vecteurs $2k\pi\vec{i}$



Qarray.tn - Agra Blech - Qarray.tn